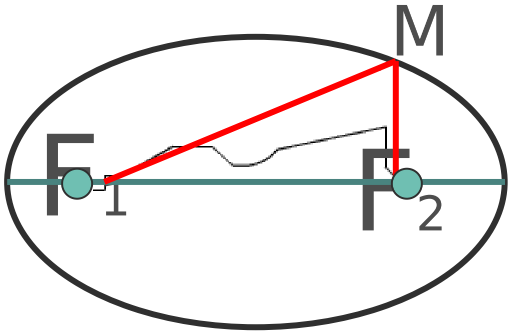

M
F1
F2

知识点1 椭圆的定义

重点

1. 椭圆的定义

我们把平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆(ellipse).

这两个定点叫做椭圆的焦点,两焦点间的距离叫做椭圆的焦距.

2. 椭圆定义的集合描述

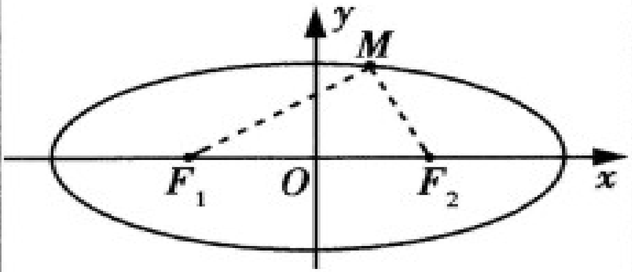
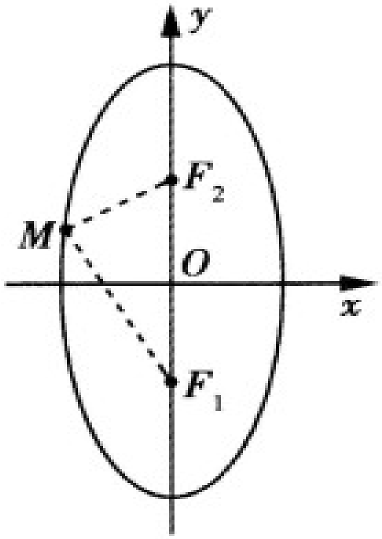
设点 M 是椭圆上的任意一点,点 F_1,F_2 是椭圆的焦点,则由椭圆的定义知,椭圆就是集合$P=\{M \mid |MF_1|+|MF_2|=$常数,常数$>|F_1F_2|>0\}$.

知识点2 椭圆的标准方程

1. 推导过程

椭圆的标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$

2. 椭圆的两种标准方程

椭圆的标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
图象		
椭圆焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
焦点坐标	$(-c,0),(c,0)$	$(0,-c),(0,c)$
焦距	$2c$	
异同点	相同点：大小、形状都相同，都有 $a>b>0$，$a>c>0$，a,b,c 的关系都满足 $a^2-b^2=c^2$. 不同点：位置和焦点坐标不同	

1. 若椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$的焦距为2,则$m=$ **答案**▶ C

A. 3　　　B. 5　　　C. 3或5　　　D. -3

2. 已知方程$\frac{x^2}{m+9}+\frac{y^2}{25-m}=1$.

(1)若上述方程表示焦点在x轴上的椭圆,求实数m的取值范围;

$8<m<25$.

(2)若上述方程表示焦点在y轴上的椭圆,求实数m的取值范围;

$-9<m<8$

(3)若上述方程表示焦点在坐标轴上的椭圆,求实数m的取值范围.

$(-9,8)\cup(8,25)$

3. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，点 $A(1,1)$，则点 A 与椭圆 C 的位置关系是　**答案▶B**

A. 点在椭圆上　　B. 点在椭圆内

C. 点在椭圆外　　D. 无法判断

$|PF_1|+|PF_2|<2a\Leftrightarrow$ 点 P 在椭圆内部；

$|PF_1|+|PF_2|=2a\Leftrightarrow$ 点 P 在椭圆上；

$|PF_1|+|PF_2|>2a\Leftrightarrow$ 点 P 在椭圆外部.

点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆外 $\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$；

点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆内 $\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$；

点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上 $\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

知识点3 ‖ 椭圆的其他方程形式

1. 椭圆两种标准方程的统一形式

$Ax^2+By^2=1$（其中 $A>0,B>0,A\neq B$）.

2. 椭圆的一般方程

3. 共焦点的椭圆系方程

与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$有公共焦点的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$ $(a>b>0)$；与椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$有公共焦点的椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2+\lambda}+\frac{x^2}{b^2+\lambda}=1(a>b>0)$.

4. 已知曲线 $C:\dfrac{x^2}{k-5}+\dfrac{y^2}{3-k}=-1$,则“$4\leqslant k<5$”是“曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆”的

答案 ▶ A

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 与椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 有公共焦点的椭圆是

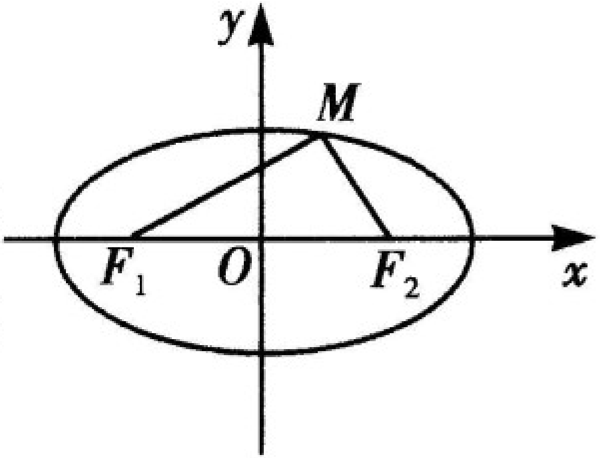
答案 ▶ C

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{20}=1$

C. $\dfrac{x^2}{30}+\dfrac{y^2}{21}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{21}+\dfrac{y^2}{30}=1$

知识点4 ‖ 椭圆的焦点三角形

1. 焦点三角形的概念



设 M 是椭圆上一点，F_1，F_2 为椭圆的焦点，当点 M，F_1，F_2 不在同一条直线上时，它们构成一个三角形——焦点三角形，如图 2.2.1－2 所示.

2. 焦点三角形的常用公式

(1)焦点三角形的周长 $L=2a+2c$.

(2)在 $\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1||MF_2|\cos\angle F_1MF_2$.

(3)焦点三角形的面积 $S_{\triangle F_1MF_2}=\frac{1}{2}|MF_1||MF_2|\sin\angle F_1MF_2=b^2\tan\frac{\angle F_1MF_2}{2}$.

6．如图 2.2.1－3 所示，已知 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 的两个焦点.

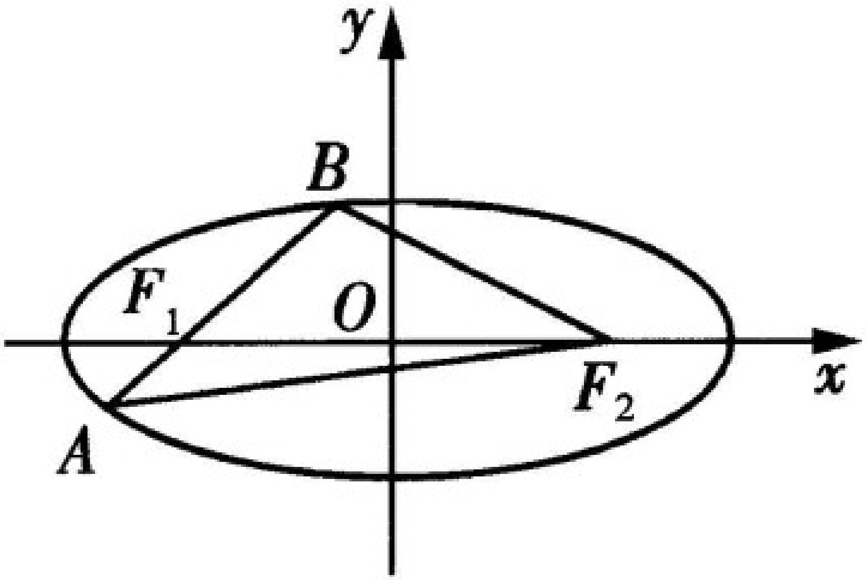


图 2.2.1－3

(1)若椭圆上一点 P 到焦点 F_1 的距离等于 15，那么点 P 到另一个焦点 F_2 的距离是多少?

(2)过焦点 F_1 作直线与椭圆交于 A，B 两点，试求 $\triangle ABF_2$ 的周长.

解析▶ 由椭圆的标准方程可知 $a^2=100$，所以 $a=10$.

(1) 由椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=20$，

又 $|PF_1|=15$，所以 $|PF_2|=20-15=5$.

(2) $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=(|AF_1|+|BF_1|)+|AF_2|+|BF_2|=(|AF_1|+|AF_2|)+(|BF_1|+|BF_2|)$.

由椭圆的定义可知 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，故 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=4a=40$.

7. 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$的左焦点是$F_1$,右焦点是$F_2$,点$P$在椭圆上,如果线段$PF_1$的中点在$y$轴上,那么$|PF_1|:|PF_2|=$

A. 3:5　　B. 3:4　　C. 5:3　　D. 4:3　**答案▶** C

8. 设F_1,F_2为椭圆$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$的两个焦点,$P$为椭圆上任一点,已知$P,F_1,F_2$是一个直角三角形的三个顶点,且$|PF_1|>|PF_2|$,求$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$的值. $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$的值为$\frac{7}{2}$或2.

9. 求满足下列条件的椭圆的标准方程：

(1)两个焦点的坐标分别为 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，并且椭圆上一点 P 与两焦点的距离的和等于 10；

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

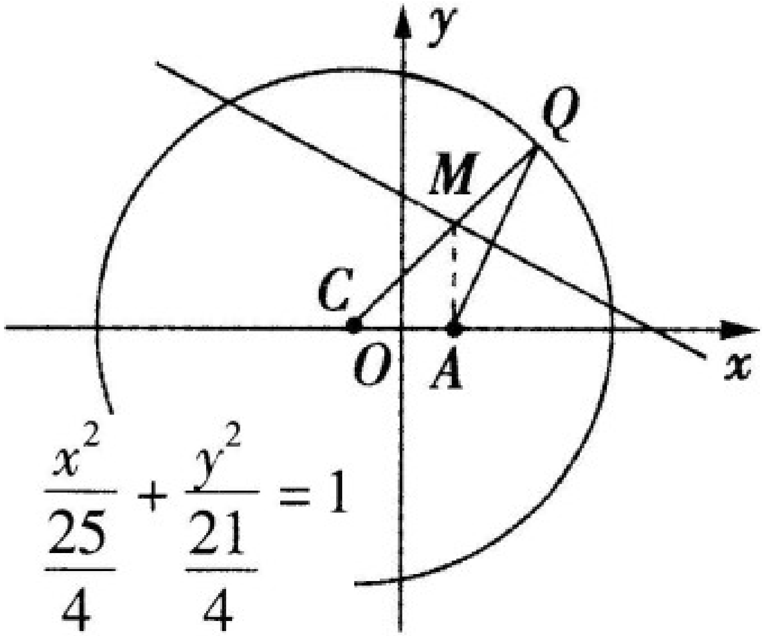
(2)焦点分别为$(0,-2)$，$(0,2)$，经过点$(4,3\sqrt{2})$；

$$\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{32}=1$$

(3)经过两点$(2,-\sqrt{2})$，$\left(-1,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$$

10. 如图 2.2.1－4 所示，在圆 C：$(x+1)^2+y^2=25$ 内有一点$A(1,0)$. Q 为圆 C 上任意一点，线段 AQ 的垂直平分线与 C，Q 的连线交于点 M，当点 Q 在圆 C 上运动时，求点 M 的轨迹方程.



$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{21}{4}}=1$$

11. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 的两个焦点，P 为椭圆上一点，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值是________.

解析▶ 依题意知 $a=10$，由椭圆定义有 $|PF_1|+|PF_2|=20$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|\leq\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=100$，当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时等号成立，故 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值是 100.

12. 设 $M(x,y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的任意一点，求 $x+y$ 的最值. $(x+y)_{min}=-5,(x+y)_{max}=5$.

13. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 内有一点 $M(2,3)$，F_1，F_2 分别为椭圆的左、右焦点，P 为椭圆 C 上的一点，求：

(1) $|PM|-|PF_1|$ 的最大值与最小值；　$\sqrt{34}$.　$-\sqrt{34}$

(2) $|PM|+|PF_1|$ 的最大值与最小值.　$10+\sqrt{10}$　$10-\sqrt{10}$

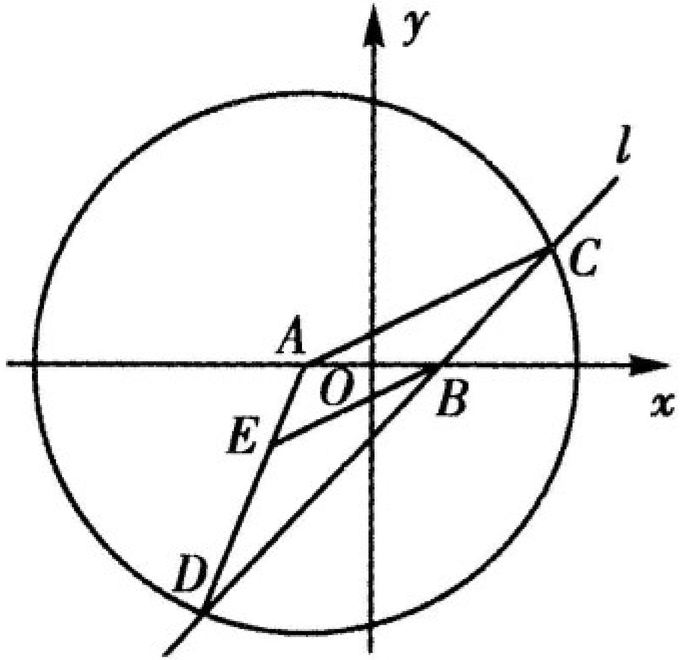
14. 已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上一点，M、N 分别是圆 $(x+3)^2+y^2=4$ 和 $(x-3)^2+y^2=1$ 上的点，则 $|PM|+|PN|$ 的取值范围是　**答案**▶ A

A. $[7,13]$　B. $[10,15]$　C. $[10,13]$　D. $[7,15]$

15. (2016 · 乙卷(全国卷 Ⅰ)节选)设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A,直线 l 过点 $B(1,0)$ 且与 x 轴不重合,l 交圆 A 于 C,D 两点,过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E.

证明 $|EA|+|EB|$ 为定值,并写出点 E 的轨迹方程.

解析▶ 圆 A 的方程整理可得 $(x+1)^2+y^2=16$,点 A 坐标为 $(-1,0)$,如图 2.2.1-6.



因为$|AD|=|AC|$，所以$\angle ACD=\angle ADC$. 因为$EB /\!/ AC$，所以$\angle EBD=\angle ACD$，故$\angle EBD=\angle ACD=\angle ADC$.

所以$|EB|=|ED|$，故$|EA|+|EB|=|EA|+|ED|=|AD|$.

又圆A的标准方程为$(x+1)^2+y^2=16$，从而$|AD|=4$，所以$|EA|+|EB|=4$.

由题设得$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$|AB|=2$，由椭圆定义可得点E的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$.

16. (2014·华约联盟自主招生)从椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的动点 M 作圆 $x^2+y^2=b^2$ 的两条切线，切点为 P 和 Q，直线 PQ 与 x 轴和 y 轴的交点分别为 E 和 F，求 $\triangle EOF$ 面积的最小值.

解析▶ 设 $M(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由题设知 $x_0\neq 0$，$y_0\neq 0$. 直线 MP 和 MQ 的方程分别为 $x_1x+y_1y=b^2$，$x_2x+y_2y=b^2$. 因为点 M 在直线 MP 和 MQ 上，所以 $x_1x_0+y_1y_0=b^2$，$x_2x_0+y_2y_0=b^2$. 可知 P,Q 两点坐标都满足方程 $x_0x+y_0y=b^2$，所以直线 PQ 的方程为 $x_0x+y_0y=b^2$.

可得直线 PQ 与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $E(\frac{b^2}{x_0},0)$ 和 $F(0,\frac{b^2}{y_0})$.

所以 $\triangle EOF$ 的面积 $S_{\triangle EOF}=\frac{1}{2}|OE||OF|=\frac{b^4}{2|x_0y_0|}$.

因为 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，又 $b^2x_0^2+a^2y_0^2\geqslant 2ab|x_0y_0|$，所以 $|x_0y_0|\leqslant\frac{ab}{2}$.

所以 $S_{\triangle EOF}\geqslant\frac{b^3}{a}$，当且仅当 $b^2x_0^2=a^2y_0^2=\frac{a^2b^2}{2}$ 时，$\triangle EOF$ 面积取得最小值 $\frac{b^3}{a}$.

17. 知识点 1,2 已知椭圆的焦距为 $4\sqrt{3}$，椭圆上动点 P 与两个焦点距离乘积的最大值为 13，则该椭圆的标准方程是（ D ）

A. $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{12}=1$

B. $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{25}=1$ 或 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{13}=1$

C. $\frac{x^2}{13}+y^2=1$

D. $\frac{x^2}{13}+y^2=1$ 或 $x^2+\frac{y^2}{13}=1$

18. 知识点 2,4 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 F，直线 $x=m$ 与椭圆相交于点 A,B. 当 $\triangle FAB$ 的周长最大时，$\triangle FAB$ 的面积是 3 ______.